

Hoofdstuk 7 - Veranderingen

bladzijde 168

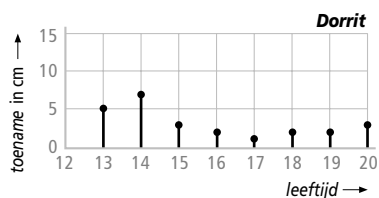
V-1a Op zijn dertiende was Jos 127 cm en op zijn twaalfde 120. Zijn lengte nam dus 7 cm toe.

b Dorrit haar lengte nam toe van 150 naar 155, dus 5 cm.

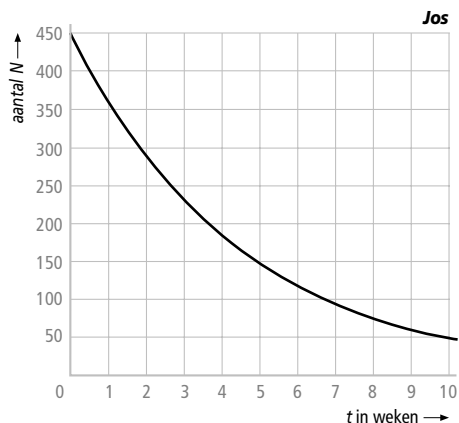
c De grafiek van Jos is in dat jaar veel steiler dan die van Dorrit, dus groeide hij harder.

leeftijd	12	13	14	15	16	17	18	19	20
toename lengte Jos		7	7	16	5	5	0	2	5
toename lengte Dorrit		5	7	3	2	1	2	2	3

V-2a



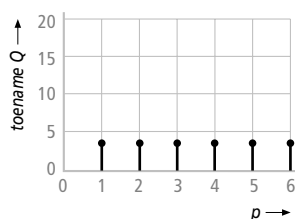
b



c Ja, in hun 19^{de} jaar nam de lengte bij beide met 2 cm toe. Je moet dan in het toenamediaagram kijken of de staafjes even hoog zijn.

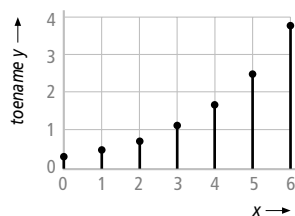
V-3a

p	0	1	2	3	4	5	6
toename Q	3	3	3	3	3	3	3



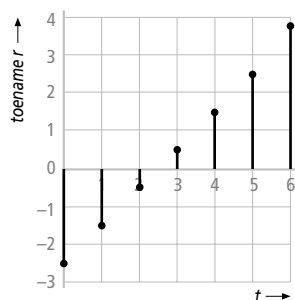
b

x	0	1	2	3	4	5	6
toename y	$\frac{1}{3}$	0,5	0,75	1,125	1,688	2,531	3,797



c

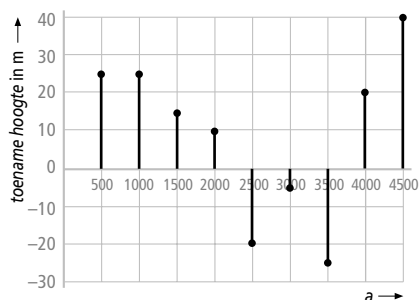
t	0	1	2	3	4	5	6
toename r	-2,5	-1,5	-0,5	0,5	1,5	2,5	3,5



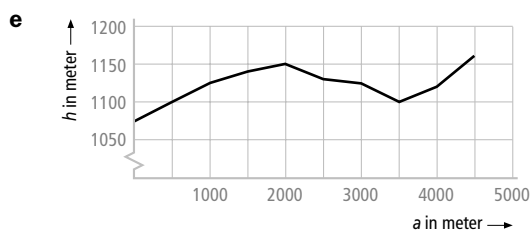
bladzijde 169

V-4a

a	0	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500
toename hoogte		25	25	15	10	-20	-5	-25	20	40



- b** Van 4000 naar 4500 is de klim het steilst.
c De weg daalt het sterkst van 3000 naar 3500 meter.
d Van 2000 meter naar 2500 meter daalt de weg, dus is na 2000 meter is blijkbaar een hoogste punt bereikt. In het toenamediaqram zie je een afname van de hoogte van 2000 meter naar 2500 meter.

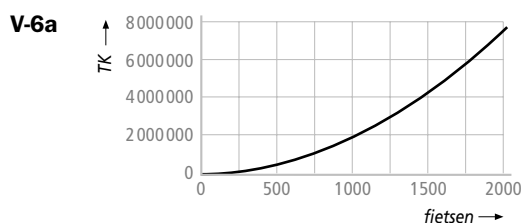
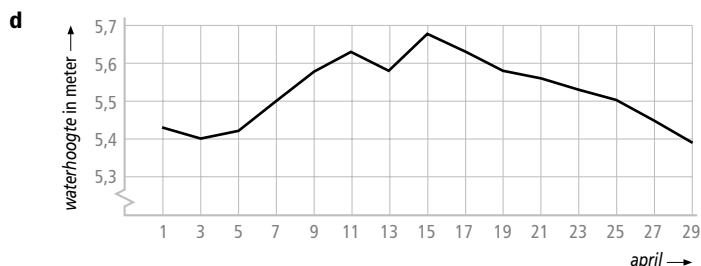


- V-5a** Van 27 tot 29 april daalde het water het snelst.
b Op 7 april was de waterhoogte 5,50 meter, de toename van 5 tot 7 april was 8 cm, dus op 5 april was de waterhoogte 5,42 meter. Zo kun je terugrekenen. De toename van 7 naar 9 april was 8 cm, dus op 9 april was de waterhoogte 5,58 meter.

datum april	1	3	5	7	9	11	13
waterhoogte in meter	5,43	5,40	5,42	5,50	5,58	5,63	5,59

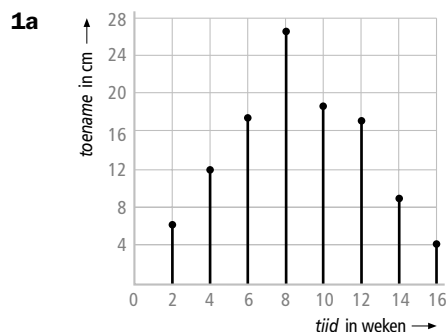
datum april	15	17	19	21	23	25	27	29
waterhoogte in meter	5,69	5,65	5,61	5,58	5,54	5,50	5,45	5,39

- c** De grootste waterhoogte was waarschijnlijk 15 april, maar precies kun je dat niet zeggen, want het zou 14 april of 16 april hoger geweest kunnen zijn.



- b** Er zijn alleen toenames, dus een stijgende totaal opbrengst.
c Bij 600, daar is de toename maximaal.
d Ja, van 900 naar 2000.

bladzijde 170

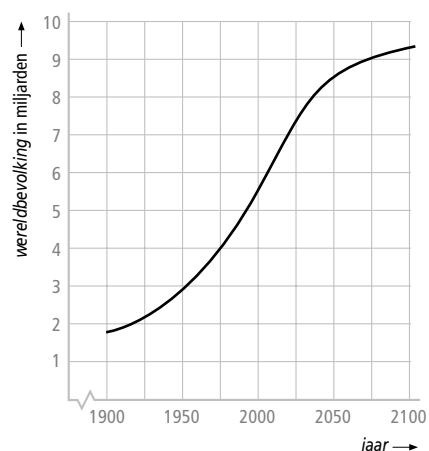


- b** De toenames nemen eerst toe en daarna weer af.
c De plant groeit in het begin heel snel en later wat langzamer.
- 2** De eerste grafiek is lineair stijgend, er komt dus steeds hetzelfde bij, het toenamediaagram is constant, dus nummer 5.
 De tweede grafiek is toenemend stijgend, het toenamediaagram moet dat dus ook zijn, nummer 3.
 De derde grafiek is afnemend stijgend, het toenamediaagram moet dus steeds kleinere toenames laten zien, nummer 1.
 De vierde grafiek is lineair dalend, er gaat dus steeds hetzelfde af, nummer 6.
 De vijfde grafiek is toenemend dalend, in het toenamediaagram zijn de afnamen dus steeds groter, nummer 2.
 De zesde grafiek is afnemend dalend, de afnamen worden steeds kleiner, dus nummer 4.

bladzijde 171

- 3a** Om de grafiek te kunnen tekenen moet je weten waar je moet beginnen, de toenamen alleen zijn niet genoeg.
- b** Uit het toenamediagram is wel af te lezen dat de grafiek eerst toenemend stijgend en daarna afnemend stijgend is.
- c** Met dit begingegeven kun je de grafiek wel tekenen. Maak eerst een tabel.

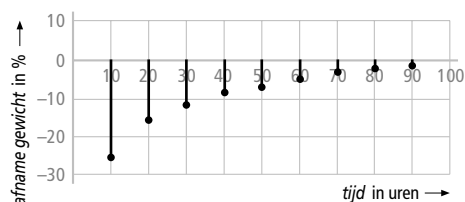
jaar	1900	1925	1950	1975	2000	2025	2050	2075	2100
grootte bevolking in miljarden	1,8	2,2	2,9	4,1	5,5	7,5	8,5	9,1	9,3



- d** Tussen 2000 en 2025 groeit de wereldbevolking het snelst. Je ziet dat in het toenamediagram als de grootste toename.

4a

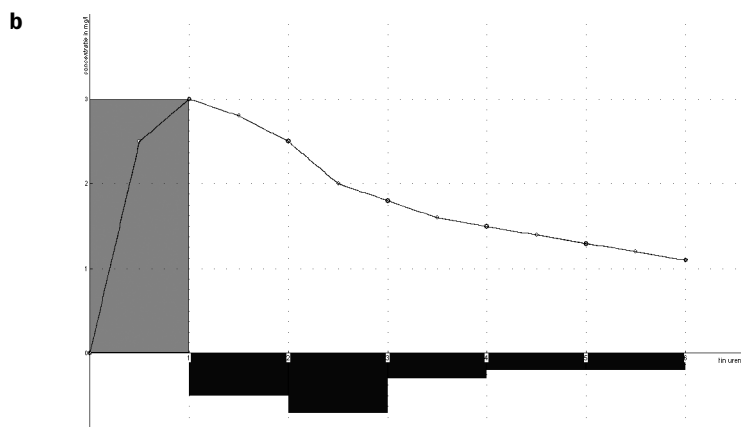
tijd in uren	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
afname gewicht in procenten		26	16	12	9	7	6	4	2	1	



- b** Het gewicht neemt af tot een bepaalde waarde. Er is sprake van een afnemende daling
- c** Het gewicht neemt na 90 minuten nog maar heel langzaam af. Het toenamediagram gaat steeds vlakker lopen.
- d** Op den duur zal het gewicht ongeveer 10 tot 15% zijn van het oorspronkelijke gewicht.

5a

t in uren	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
concentratie in mg/l	0,0	2,5	3,0	2,8	2,5	2,0	1,8	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1



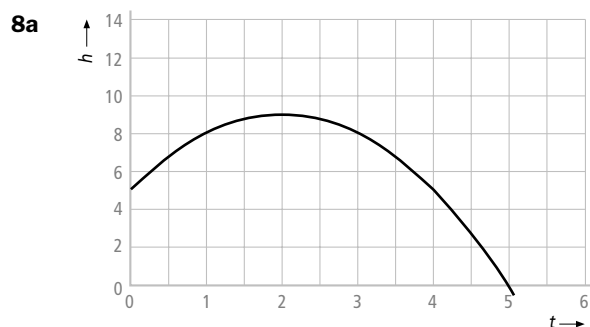
- c** De grafiek is eerst afnemend stijgend, even toenemend dalend en vervolgens afnemend dalend.
- d** De grafiek daalt het snelst 2 uur en 30 minuten na de injectie.

bladzijde 172

- 6a** Op dag 2 was de waterhoogte 55 cm en op dag 1 was dat 50 cm. De waterhoogte is de eerste dag dus 5 cm hoger geworden.
Op dag 15 was de waterhoogte 60 cm en op dag 14 85 cm. De waterhoogte is dus 25 cm afgenomen.
- b** Op dag 8 was de waterhoogte 125 cm en op dag 1 was dat 50 cm. De waterhoogte is dus 75 cm toegenomen. Dit is gemiddeld $\frac{75}{7} \approx 10,7$ cm per dag.
- c** Op dag 15 was de waterhoogte 60 cm en op dag 8 was deze 125 cm. De waterhoogte nam dus gemiddeld met $\frac{125-60}{7} \approx 9,3$ cm per dag af.
- d** Daar waar de grafiek het steilst is, stijgt de waterhoogte het snelst, dus op dag 3 en dag 4.

bladzijde 173

- 7a** De gemiddelde snelheid over de 100 meter was $\frac{100}{9,86} = 10,14$ m/s.
- b** Gedurende het interval van 70 tot 80 was zijn snelheid het grootst.
- c** Gedurende dit tijdsinterval was zijn snelheid $\frac{10}{0,83} = 12,05$ m/s.



- b** De pijl bereikt na 2 seconden zijn maximale hoogte.

- c** Gedurende de eerste twee seconden steeg de pijl van 5 naar 9 meter met een gemiddelde snelheid van 2 m/s.
- d** Van het hoogste punt tot de landing ging de pijl van hoogte 9 meter naar hoogte 0 meter. De pijl legde dus -9 meter af in 3 seconden, dus een gemiddelde snelheid van $\frac{-9}{3} = -3$ m/s. Dus een gemiddelde snelheid van 3 m/s omlaag.
- 9a** De AEX begon op een stand van 330 en eindigde na 20 dagen op een stand van 334 punten.
De gemiddelde stijging is dan $\frac{334 - 330}{27 - 8} \approx 0,21$ punt per dag.
- b** Op 18 november was de koers 339 punten en op 23 november 325 punten. Dit is een gemiddelde daling van $\frac{14}{5} \approx 2,8$ punten per dag.
- 10a** $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{80}{5} = 16$ km/uur op het interval $[0, 5]$.
- b** De gemiddelde snelheid over de eerste drie uur is $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{48 - 0}{3} = 16$ km/uur.
- c** Je vindt dezelfde snelheid omdat de helling op het interval $[0, 3]$ hetzelfde is als de helling op het interval $[0, 5]$.
- d** In de eerste twee uur is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{40 - 0}{2} = 20$ km/uur.
- In de daarop volgende twee uur is de gemiddelde snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{57 - 40}{4} = 8,5$ km/uur.
- 11a** $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[0,4]} = \frac{4 - 0}{4 - 0} = 1$; $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[1,4]} = \frac{4 - 3}{4 - 1} = \frac{1}{3}$;
 $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[4,9]} = \frac{3 - 4}{9 - 4} = -0,2$; $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[0,16]} = \frac{0 - 0}{16 - 0} = 0$
- b** $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[0;0,5]} \approx \frac{2,33 - 0}{0,5 - 0} \approx 4,66$; $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[0;0,1]} \approx \frac{1,16 - 0}{0,1 - 0} \approx 11,6$; $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{[0;0,01]} = \frac{0,39 - 0}{0,01 - 0} = 39$
- c** Omdat de grafiek steeds steiler wordt in de buurt van 0.

bladzijde 174

- 12a** Gemiddelde snelheid fietser A is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{45}{3} = 15$ km/uur.
 Gemiddelde snelheid fietser B is $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{45}{3} = 15$ km/uur.
- b** $\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{[0;0,5]} = \frac{A(0,5) - A(0)}{0,5 - 0} = \frac{7,5 - 0}{0,5} = 15$ km/uur;
 $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[0;0,5]} = \frac{B(0,5) - B(0)}{0,5 - 0} = \frac{11,25 - 0}{0,5} = 22,5$ km/uur;
 $\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{[0,5;1]} = \frac{A(1) - A(0,5)}{1 - 0,5} = \frac{15 - 7,5}{0,5} = 15$ km/uur;
 $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[0,5;1]} = \frac{B(1) - B(0,5)}{1 - 0,5} = \frac{21 - 11,25}{0,5} = 19,5$ km/uur;

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{[1; 1,5]} = \frac{A(1,5) - A(1)}{1,5 - 1} = \frac{22,5 - 15}{0,5} = 15 \text{ km/uur};$$

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1; 1,5]} = \frac{B(1,5) - B(1)}{1,5 - 1} = \frac{29,25 - 21}{0,5} = 16,5 \text{ km/uur};$$

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{[1,5; 2]} = \frac{A(2) - A(1,5)}{2 - 1,5} = \frac{30 - 22,5}{0,5} = 15 \text{ km/uur};$$

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1,5; 2]} = \frac{B(2) - B(1,5)}{2 - 1,5} = \frac{36 - 29,25}{0,5} = 13,5 \text{ km/uur};$$

- c Fietser A rijdt met een constante snelheid, dus op welk interval je de snelheid bekijkt maakt niet uit het zal altijd 15 km/uur zijn.

d $\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1; 2]} = \frac{B(2) - B(1)}{2 - 1} = \frac{36 - 21}{1} = 15 \text{ km/uur};$

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1; 1,2]} = \frac{B(1,2) - B(1)}{1,2 - 1} = \frac{24,48 - 21}{0,2} = 17,4 \text{ km/uur};$$

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1; 1,1]} = \frac{B(1,1) - B(1)}{1,1 - 1} = \frac{22,77 - 21}{0,1} = 17,7 \text{ km/uur};$$

- e De laatste benadering is de beste benadering voor de snelheid van fietser B op tijdstip 1, want dit interval is het kleinst.

- 13a Snelheid op $t = 3$ is ongeveer

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[3; 3,001]} = \frac{h(3,001) - h(3)}{3,001 - 3} \approx \frac{26,85126161 - 26,84678752}{0,001} \approx$$

$$\frac{0,004474}{0,001} \approx 4,5 \text{ cm/min.}$$

- b Snelheid op $t = 5$ is ongeveer

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_{[5; 5,001]} = \frac{h(5,001) - h(5)}{5,001 - 5} \approx \frac{34,66251938 - 34,65905365}{0,001} \approx$$

$$\frac{0,003466}{0,001} \approx 3,5 \text{ cm/min.}$$

bladzijde 175

- 14a Snelheid van fietser B op tijdstip $t = 1$:

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1; 1,001]} = \frac{B(1,001) - B(1)}{1,001 - 1} \approx \frac{21,017997 - 21}{0,001} \approx \frac{0,017997}{0,001} \approx 18 \text{ km/uur.}$$

- b Snelheid fietser B op tijdstip $t = 1,5$:

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[1,5; 1,501]} = \frac{B(1,501) - B(1,5)}{1,501 - 1,5} \approx \frac{29,264997 - 29,25}{0,001} \approx \frac{0,014997}{0,001} \approx 15 \text{ km/uur.}$$

Het klopt dus.

- c Snelheid fietser B op tijdstip $t = 2$:

$$\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}\right)_{[2; 2,001]} = \frac{B(2,001) - B(2)}{2,001 - 2} \approx \frac{36,011997 - 36}{0,001} \approx \frac{0,011997}{0,001} \approx 12 \text{ km/uur.}$$

- 15a** De snelheid waarmee het aantal zieken toeneemt na 1 week is ongeveer:

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right)_{[1; 1,001]} = \frac{A(1,001) - A(1)}{1,001 - 1} = \frac{5000 \cdot 2^{1,001} - 5000 \cdot 2^1}{0,001} \approx \frac{10006,934 - 10000}{0,001} \approx 6934$$

Na één week neemt het aantal zieken toe met 6934 per week.

- b** De snelheid waarmee het aantal zieken toeneemt na 2 weken is ongeveer:

$$\left(\frac{\Delta A}{\Delta t} \right)_{[2; 2,001]} = \frac{A(2,001) - A(2)}{2,001 - 2} = \frac{5000 \cdot 2^{2,001} - 5000 \cdot 2^2}{0,001} \approx \frac{20013,868 - 20000}{0,001} \approx 13868$$

Na twee weken neemt het aantal zieken toe met 13 868 per week.

- c** TI: Dat kan door de functie in te voeren als Y1 in je rekenmachine en dan de grafiek te plotten. Gebruik de optie CALC – 6: dy/dx en toets de x-coördinaat van het punt in waar je helling of snelheid wilt weten. Onderin het scherm staat de uitkomst.
CASIO: Dat kan door de functie in te voeren als Y1 in je rekenmachine. Kies TABLE in het hoofdmenu en daarna SETUP (SHIFT-MENU). Ga naar DERIVATIVE en zet deze op ON. Plot een tabel. Bij elke x-coördinaat in de tabel wordt nu Y de functiewaarde en bij Y' de helling gegeven. Ook zie je nu in het grafiekscherm de helling van de grafiek in een punt weergegeven (via TRACE).

- 16a** Het aantal op $t = 0$ is: $N(0) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^0} = 40$ fruitvliegjes.

- b** Het aantal op $t = 8$ is: $N(8) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^8} \approx 133$ fruitvliegjes. De groeisnelheid is dan:

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)_{[8; 8,001]} = \frac{N(8,001) - N(8)}{8,001 - 8} \approx \frac{132,6486919 - 132,6299947}{0,001} \approx 19 \text{ fruitvliegjes per dag.}$$

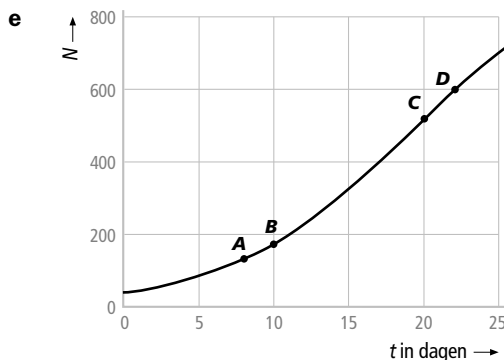
Het aantal op $t = 20$ is: $N(20) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^{20}} \approx 518$ fruitvliegjes. De groeisnelheid is dan:

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t} \right)_{[20; 20,001]} = \frac{N(20,001) - N(20)}{20,001 - 20} \approx \frac{518,1138889 - 518,0733123}{0,001} \approx 41 \text{ fruitvliegjes per dag.}$$

- c** Op $t = 10$ zullen er dan ongeveer $133 + 2 \cdot 19 = 171$ fruitvliegjes zijn.
Op $t = 22$ zullen er dan ongeveer $518 + 2 \cdot 41 = 600$ fruitvliegjes zijn.

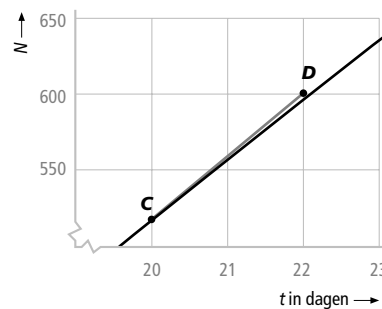
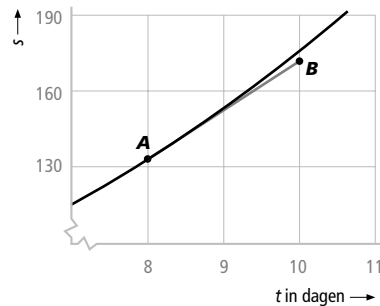
- d** Op $t = 10$: $N(10) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^{10}} = 175$ fruitvliegjes.

$$\text{Op } t = 22 \quad N(22) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^{22}} = 598 \text{ fruitvliegjes.}$$



Hierboven zie je de grafiek van N . Wat je doet bij opdracht c voor $t = 10$, is de grafiek in een rechte lijn voortzetten met een toename die gelijk is aan die op $t = 8$. Maar de grafiek is daar toenemend stijgend, dus je komt te laag uit. Voor $t = 22$ doe je

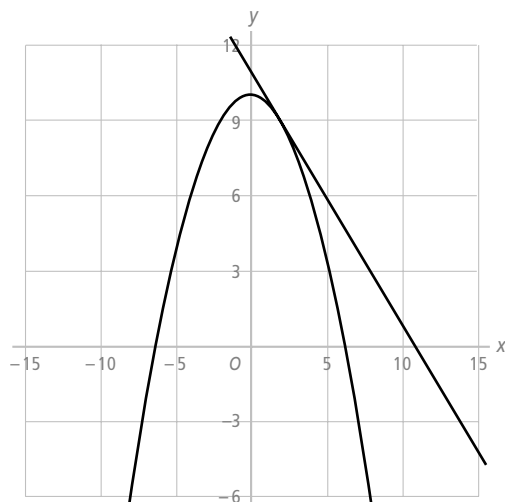
hetzelfde vanuit $t = 20$, maar nu is de grafiek afnemend stijgend, dus je komt te hoog uit. Hieronder zie je de grafiek nog eens maar nu uitvergroot voor de betreffende delen.



bladzijde 176

- 17a** Omdat ze gelijk vertrokken zijn en gelijk aankomen, moeten ze wel met dezelfde gemiddelde snelheid hebben gereden.
- b** De snelheid van fietser B op $t = 1,25$ is
- $$\frac{B(1,251) - B(1,25)}{1,251 - 1,25} = \frac{25,328997 - 25,3125}{0,001} = \frac{0,016497}{0,001} \approx 16,5 \text{ km/uur}$$
- c** De helling van die lijn is 16,5 want dat is dan de constante snelheid.

18a,b



- c** Wanneer je nauwkeurig hebt getekend dan vind je dat de helling van de raaklijn -1 is.
- d** Helling in $(2, 9)$ is: $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{x=2} = \frac{(10 - 0,25 \cdot 2,001^2) - (10 - 0,25 \cdot 2^2)}{2,001 - 2} = \frac{-0,00100025}{0,001} \approx -1$
- 19a** Probeer de raaklijn in het punt $(10, 2000)$ zo nauwkeurig mogelijk te tekenen. De lijn gaat dan ongeveer door de punten $(10, 2000)$ en $(20, 6500)$.
- De helling is dan $\frac{6500 - 2000}{20 - 10} = 450$ zieken per dag.
- b** De snelheid waarmee het aantal zieken per dag toeneemt is het grootst wanneer de grafiek het steilst is, en dat is in het punt $(14, 6000)$. Na 14 dagen dus.

- c Teken zo nauwkeurig mogelijk de raaklijn in het punt (14, 6000). Deze zal dan ook gaan door het punt (16, 10500). De helling van de raaklijn en dus de snelheid waarmee het aantal zieken toeneemt is dan $\frac{10500 - 6000}{16 - 14} = 2250$ zieken per dag.

bladzijde 177

- 20 Het rechte lijntje na $t = 10$ gaat door de punten (10, 83) en (14, 150). De helling van dit lijnstuk en dus de snelheid van de trein op het moment van losschieten is dan

$$\frac{150 - 83}{14 - 10} \approx 17 \text{ m/s.}$$

Dit is ongeveer 61 km/uur.

21a De helling voor $x = 1$ is $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=1} \approx \frac{5 \cdot 1,001^3 - 5 \cdot 1^3}{0,001} \approx \frac{5,01501 - 5}{0,001} \approx 15,01$

De helling voor $x = 2$ is $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=2} \approx \frac{5 \cdot 2,001^3 - 5 \cdot 2^3}{0,001} \approx \frac{40,06003 - 40}{0,001} \approx 60,03$

b De helling voor $x = 1$ is $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=1} \approx \frac{(7 \cdot 1,001 - 8) - (7 \cdot 1 - 8)}{0,001} = \frac{0,007}{0,001} = 7$

De helling voor $x = 2$ is $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{x=1} \approx \frac{(7 \cdot 2,001 - 8) - (7 \cdot 2 - 8)}{0,001} = \frac{0,007}{0,001} = 7$

- c De formule bij opdracht b is een rechte lijn, de helling is in elk punt dus gelijk namelijk 7.

22a De gemiddelde snelheid tussen $t = 10$ en $t = 30$ was: $\frac{8 - 3,5}{20} \approx 0,225 \text{ km/min}$
 $\approx 13,5 \text{ km/uur.}$

b De gemiddelde snelheid tussen $t = 30$ en $t = 60$ was: $\frac{15 - 8}{30} \approx 0,233 \text{ km/min}$
 $\approx 14 \text{ km/uur.}$

- c De helling van de raaklijn voor $t = 40$ is ongeveer gelijk aan de helling van de lijn door de punten bij $t = 30$ en $t = 60$.

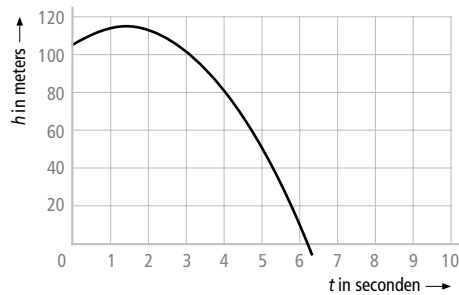
- d De helling van de lijn door de punten bij $t = 10$ en $t = 30$ is niet hetzelfde als de helling van de raaklijn voor $t = 15$.

e De helling van de getekende raaklijn is ongeveer $\frac{5}{15} \approx 0,3333 \text{ km/min} \approx 20 \text{ km/uur.}$

- f De snelheid op $t = 80$ is gelijk aan de helling van de raaklijn. De helling van de raaklijn wordt $\frac{20 - 18}{100 - 80} = 0,1 \text{ km/min} = 6 \text{ km/uur.}$

bladzijde 178

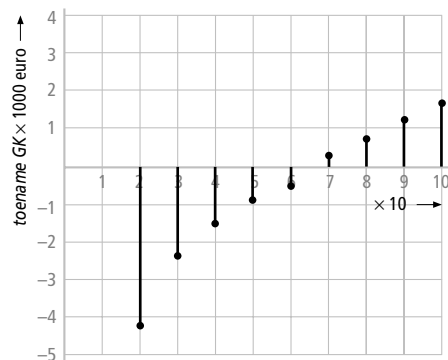
23a



- b** De maximale hoogte die de bal bereikt bepaal je met je rekenmachine en is 114,8 meter.
- c** De bal is na 1,4 seconden op maximale hoogte.
- d** Wanneer de helling positief is betekent dit dat de bal stijgt, als de helling nul is heeft de bal zijn hoogste punt bereikt en als de helling negatief is dan daalt de bal weer.

24a

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
GK	13,25	9	6,58	5	4,05	3,67	3,82	4,5	5,69	7,4
toename GK		-4,25	-2,42	-1,58	-0,95	-0,38	0,15	0,68	1,19	1,71

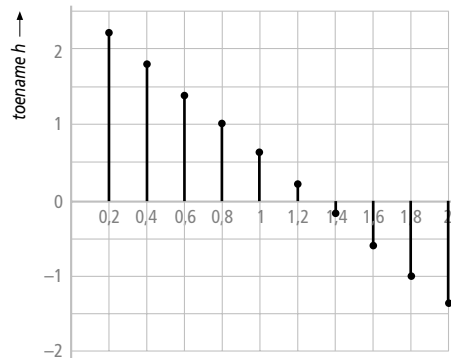


- b** Wanneer de afnamen in de gemiddelde kosten overgaan in een toename is er een minimum in de gemiddelde kosten bereikt. In het toenamediaagram is dit bij ongeveer 65 ziekenhuisopnamen.
- c** Met stapgrootte 0,1 tussen 6 en 7 zie je in de tabel dat de overgang van afname naar toename gebeurt bij ongeveer 62 opnamen.

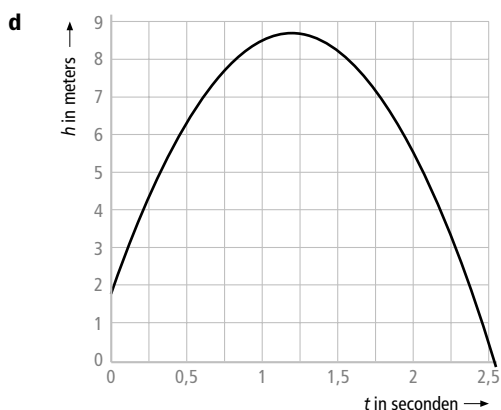
bladzijde 179

- 25a** Voor de t^2 staat -5 , dat betekent dat de grafiek een bergparabool is en er een hoogste punt is.

b	t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
	toename h		2,2	1,8	1,4	1,0	0,6	0,2	-0,2	-0,6	-1,0	-1,4



- c** Wanneer de toenames overgaan in afnamen heeft de steen zijn hoogste punt bereikt.

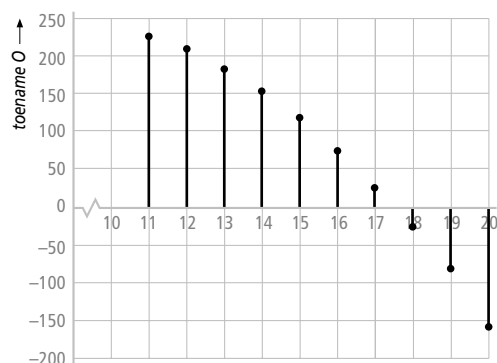


De steen bereikt zijn maximale hoogte na 1,2 seconden.

- e** Je kunt in een toenamediaagram nooit precies bepalen waar het maximum of minimum zit, maar wel ongeveer.

26a,b

q	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
O	1910	2134	2340	2522	2674	2790	2864	2890	2862	2774	2620
toename O		224	206	182	152	116	74	26	-28	-88	-154



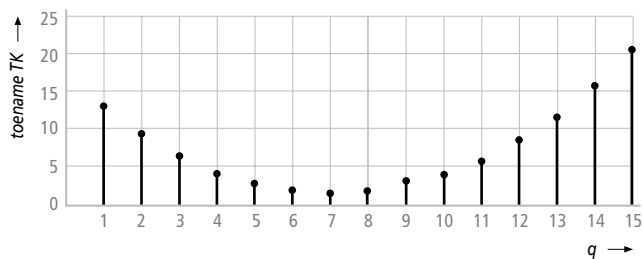
- c** Je krijgt dan een maximum voor $q = 17$.
d In het toenamediaagram gaan de toenames over in afnamen tussen 17 en 18. Daar zit het maximum.

bladzijde 180

- 27a** $TK(6) = 0,1 \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 + 15 \cdot 6 = 39,6$ de totale kosten zijn dan 39 600 euro bij een productie van 6000 vazen per week.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8
toename TK		13,1	9,7	6,9	4,7	3,1	2,1	1,7	1,9

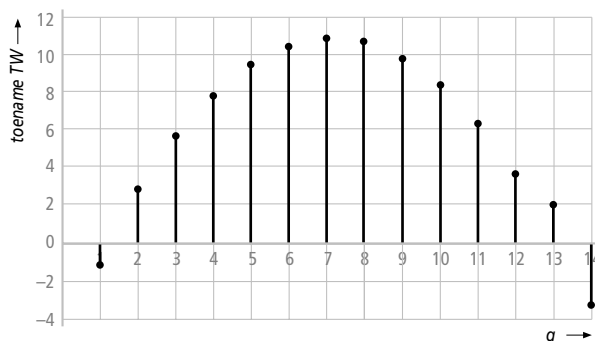
q	9	10	11	12	13	14	15
toename TK	2,7	4,1	6,1	8,7	11,9	15,7	20,1



- c** Dat de grafiek overal stijgend is kun je zien omdat het toenamediagram alleen maar positieve toenames laat zien en geen afname.

q	0	1	2	3	4	5	6	7
toename TW		-0,6	2,8	5,6	7,8	9,4	10,4	10,8

q	8	9	10	11	12	13	14
toename TW	10,6	9,8	8,4	6,4	3,8	0,6	-3,2



Uit het toenamediagram volgt dat de maximale winst bereikt wordt bij een productie van ongeveer 13 000 vazen per week. Uit de plot volgt dat het maximum bereikt wordt bij 12 676 vazen.

- 28a** Winst = Opbrengst – Kosten = $100 \cdot 0,60 - 100 \cdot 0,25 = 35,-$ euro.
- b** Wanneer de prijs 5 cent minder wordt verkopen ze 20 koppen meer. Dus bij een prijs van 35 cent verkopen ze 200 koppen.
- c** De winst is dan $W = O - K = 200 \cdot 0,35 - 200 \cdot 0,25 = 20,-$ euro. Minder winst dus.
- d** De winst is maximaal als de afstand tussen de grafieken van O en K maximaal is. Meet die afstand. De winst is maximaal bij een prijs van ongeveer 55 cent.
- e** Het verband tussen de prijs en het aantal verkochte koppen is lineair met hellingsgetal -4 . Het verband is dan van de vorm: $q = -4p + b$.
De b , het startgetal, kun je vinden met het gegeven dat bij een prijs van 60 cent er 100 koppen verkocht worden dus $100 = -4 \cdot 60 + b \Rightarrow b = 100 + 240 = 340$.
Het verband tussen het aantal verkochte koppen en de prijs is dan $q = -4p + 340$.

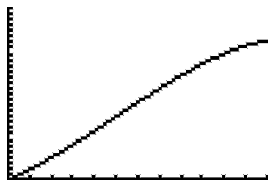
- f $TW = O - K = (-4p + 340) \cdot p - 25(-4p + 340) = -4p^2 + 440p - 8500$ Hierbij zijn TW en p uitgedrukt in eurocenten.
- g $TW(60) = -4 \cdot 60^2 + 440 \cdot 60 - 8500 = 3500$ eurocent = 35,- euro
 $TW(61) = -4 \cdot 61^2 + 440 \cdot 61 - 8500 = 3456$ eurocent = 34,56 euro
 De winst wordt bij een prijsverhoging van 60 naar 61 cent dus 44 eurocent lager.
- h Voer de formule voor TW in op je rekenmachine en bepaal het maximum. Je vindt dat de winst maximaal is bij een prijs van 55 eurocent. Dit komt overeen met het antwoord van opdracht d.
- i De maximale winst is dan 3600 eurocent, dus 36 euro.

bladzijde 181

- 29a Opgelost moet worden de vergelijking $10\,000\,000 = 9300 \cdot G^{0,5} - G$.
 Voer deze vergelijking in op je rekenmachine met Y1 en Y2 en bepaal het snijpunt.
 Je vindt dan $G = 15\,39637$ dollar of $G = 64\,950\,363$ dollar, maar omdat GoodDay niet meer dan 60 000 000 uit wil geven, zal GoodDay dus 15 39637 dollar aan reclame uitgegeven hebben dat jaar.
- b Plot de grafiek van $D = 9300 \cdot G^{0,5} - G$ en bepaal het maximum. Je vindt dat Drivewell maximaal 21 622 500 dollar uitgeeft aan reclame.
- c
$$\left(\frac{\Delta D}{\Delta G} \right)_{G=10^7} = \frac{(9300 \cdot 10\,000\,000,001^{0,5} - 10\,000\,000,001) - (9300 \cdot (10^7)^{0,5} - 10^7)}{0,001} \approx$$

$$\frac{0,00047}{0,001} \approx 0,47$$
- d Voor de reclame-uitgaven van Drivewell betekent dit als GoodDay de reclame uitgaven met één dollar verhoogt dat Drivewell zijn reclame uitgaven met 47 dollarcent moet verhogen.

30a



- Uit de plot volgt dat mevrouw Achterhuis eerst iets sneller is gaan rijden, daarna met een vrijwel constante snelheid reed en op het laatst minder hard. De grafiek is toenemend stijgend en later afnemend stijgend.
- b Haar snelheid is het grootst als de grafiek het steilst is, dit is na ongeveer 5 minuten. Haar snelheid is dan ongeveer 2,5 km/min, dus 150 km/uur.
- c Hij reed met een constante snelheid van 2 km/min. In 12 minuten reed hij dus 24 km.
- d De formule bij meneer Bouma is dan $s = 2t$.
- e De snelheid waarmee beide rijden wordt weergegeven door de helling van de grafieken. Om te kijken wanneer ze even snel reden moet je beide grafieken plotten. Wanneer de helling van de grafiek van mevrouw Achterhuis even groot is als die van de grafiek van meneer Bouma rijden ze even hard. Met eventueel inzoomen vind je dan dat dit zo is na ongeveer 1,5 minuut en na ongeveer 9 minuten.

bladzijde 182

- I-1a** Ab heeft 16 kilometer gelopen in 4 uur.
- b** Ab liep eerst heel snel, toen langzamer en na 1 uur en drie kwartier heeft hij een half uur gerust, daarna liep hij weer steeds sneller naar het eindpunt.
- c** Ab heeft gelopen met een gemiddelde snelheid van $\frac{16}{4} = 4$ km/uur.
- d** Het is een rechte lijn.
- e** Elk tijdsinterval is 1 uur.

<i>tijdsinterval</i>	0 – 1	1 – 2	2 – 3	3 – 4
<i>toename tijd</i>	1	1	1	1
<i>toename afstand</i>	7	1	1	7
<i>gemiddelde snelheid</i>	7 km/uur	1 km/uur	1 km/uur	7 km/uur

- f** De tijd – afstand grafiek geeft het beste beeld.
- I-2a** De tijd staat op 1 en dan stellen de staafjes voor de toename van s per uur.
- b** De getallen in de kolom $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ stellen de gemiddelde snelheid voor over dat tijdsinterval.
- c** Ook nu stellen de getallen in de kolom $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de gemiddelde snelheid voor, maar nu over intervallen van 0,5 uur.
- I-3a** De gemiddelde snelheid op het tijdsinterval $[1; 1,5]$ zie je onder $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ en die is 1,75 km/uur.
- b** Het getal 4,75 in de rechterkolom geeft de gemiddelde snelheid weer op het interval $[0,5; 1]$.
- c** Stel nu de toename van t in op 0,1. De gemiddelde snelheid op het interval $[0,9; 1]$ kun je dan aflezen. Deze is 3,31 km/uur.
De gemiddelde snelheid op het interval $[1; 1,1]$ is 2,71 km/uur.
De snelheid op $t = 1$ kun je schatten op ongeveer 3 km/uur.
- d** Je kunt de schatting van de snelheid op $t = 1$ nog nauwkeuriger maken door de toename van t heel klein, bijvoorbeeld 0,001 te nemen.
- e** Ab loopt vanaf de start heel snel, 12 km/uur, dan steeds langzamer tot hij stilstaat en een half uur rust en vervolgens eindigt hij weer met een snelheid van 12 km/uur.

bladzijde 183

- I-4a** Verander de horizontale as van 0 tot 2,5 en de verticale as van 0 tot 30000.
- b** De snelheid waarmee het aantal zieken toeneemt na één week is ongeveer 6931.
- I-5a** De pijl bereikt na 2 seconden zijn maximale hoogte.
- b** Er staan nu groene en rode staafjes omdat er zowel toenamen als afnamen zijn.
- c** Stel de toenametijd in op 0,001. Je vindt een benadering van de snelheid na één seconde, namelijk 2 m/s.
- d** Wanneer de vuurpijl op maximale hoogte is, is de snelheid 0 m/s.
- I-6a** Het aantal op $t = 0$ is: $N(0) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^0} = 40$ fruitvliegjes.
Wanneer je de toenametijd op 0,001 zet zie je dat de groeisnelheid op $t = 0$ gelijk is aan ongeveer 6 vliegjes per dag.

- b** Het aantal op $t = 8$ is: $N(8) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^8} = 40$ fruitvliegjes.
- c** Het aantal op $t = 30$ is: $N(30) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^{20}} \approx 845$ fruitvliegjes.
De groeisnelheid is dan volgens de grafiek ongeveer 21.
Op $t = 32$ zouden er dan $845 + 2 \cdot 21 = 887$ fruitvliegjes zijn.
- d** Het aantal volgens de formule op $t = 32$ is $N(32) = \frac{1000}{1 + 24 \cdot 0,85^{32}} \approx 883$ fruitvliegjes.
- e** Bekijk de grafiek van N . Wat je doet bij opdracht b voor $t = 6$, is de grafiek in een rechte lijn voortzetten met een toename die gelijk is aan die op $t = 6$. Maar de grafiek is daar toenemend stijgend, dus je komt te laag uit. Voor $t = 32$ doe je hetzelfde vanuit $t = 30$, maar nu is de grafiek afnemend stijgend, dus je komt te hoog uit.

bladzijde 184

- I-7a** De gemiddelde helling van AP is $\frac{6}{2} = 3$. De gemiddelde helling van AQ is $\frac{3,75}{1,5} = 2,5$.
De gemiddelde helling van AR is $\frac{2}{1} = 2$. De gemiddelde helling van AS is $\frac{0,75}{0,5} = 1,5$.
- b** a heeft nu de waarde 1.
- c** De helling van AS is de beste benadering.
- e** Hellingsgetal 1
- I-8a** Na ongeveer 0,9 seconde en na ongeveer 3,2 seconden hebben de beide pijlpunten dezelfde richting. Dus op de tijdsintervallen $[0; 0,9]$ en $[3,2; 4]$ liep Ab sneller dan zijn gemiddelde.
- b** Op twee momenten liep hij precies met de gemiddelde snelheid.
- c** Met behulp van die raaklijn kun je precies de punten vinden waar de helling van de grafiek gelijk is aan de gemiddelde snelheid.
- d** Om de lijn evenwijdig te krijgen met de grafiek van de gemiddelde snelheid moet je $a = 4$ nemen.
Schuiven met parameter b geeft een raaklijn voor $b = 3,1$ en voor $b = -3,1$.

bladzijde 185

- I-9a** Het hellingsgetal voor S is 1; het hellingsgetal voor T is 3; het hellingsgetal voor U is 5; het hellingsgetal voor R is -1; het hellingsgetal voor Q is -3 en het hellingsgetal voor P is -5.
- I-10b** Het hellingsgetal

$$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)_{[1; 1,001]} \approx \frac{(3 \cdot 1,001^2 - 12) - (3 \cdot 1^2 - 12)}{1,001 - 1} = \frac{-8,993997 - (-9)}{0,001} \approx \frac{0,006003}{0,001} \approx 6$$
 Je moet nu ook nog controleren dat de lijn door het punt $(1, -9)$ gaat.

- I-11a** Haar gemiddelde snelheid gedurende de hele loop was
- $$\frac{s(3,5)}{3,5} = \frac{3,5^3 - 4,5 \cdot 3,5^2 + 12 \cdot 3,5}{3,5} = \frac{29,75}{3,5} = 8,5 \text{ km/uur}$$
- b** Kies in het menu extra voor hellingen. Kies vervolgens hellinggrafiek en Δt gelijk aan 0,001, en druk op de groene knop. Je ziet dat voor $t = 2$ de helling 6,0015, dus 6, is en voor $t = 3$ is de helling 12,0045, dus 12.
Dit betekent dat haar snelheid na 2 uur 6 km/uur was en na 3 uur 12 km/uur.
- c** Na 1,5 uur is haar snelheid erg laag, dus rond die tijd zal zij geklommen hebben.
- I-12a** De raaklijn krijg je voor $a = 333$ en $b = -1330$. Het aantal zieken neemt op tijdstip 10 dus toe met 333 per dag.
- b** Die snelheid is het grootst als de grafiek het steilst is, dus na 14 dagen.
- c** Je kunt een schuifparameter maximaal tot 1000 laten gaan. De lijn moet hier echter nog steiler zijn.
- d** Kies in het menu extra voor hellingen. Kies vervolgens hellinggrafiek en Δt gelijk aan 0,001, en druk op de groene knop. Je ziet dat voor $t = 14$ de helling 3001,5, dus 3000, is. Het aantal zieken neemt op het hoogtepunt van de epidemie toe met 3000 per dag.

bladzijde 188

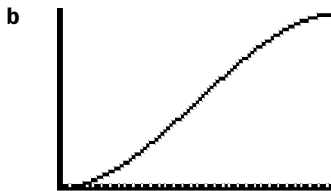
- T-1a** $R(15) = -15^3 + 25 \cdot 15^2 + 49 \cdot 15 = 2985$ en $R(15) = -15^3 + 25 \cdot 15^2 + 49 \cdot 15 = 2985$.
Wanneer er twee machines extra in gebruik zijn neemt de weekomzet toe met 320 000 euro.
 $R(16) = -16^3 + 25 \cdot 16^2 + 49 \cdot 16 = 3088$ dus als alle machines in gebruik zijn neemt de weekomzet toe met 423 000 euro.
- b** Bij een extra inzet van twee machines is de gemiddelde omzet stijging
- $$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{320\,000}{2} = 160\,000 \text{ euro per machine.}$$
- Wanneer alle machines ingezet worden is de gemiddelde omzetstijging per machine
- $$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{423\,000}{3} = 141\,000 \text{ euro.}$$
- c** Eén bijplaatsen: $R(17) = -17^3 + 25 \cdot 17^2 + 49 \cdot 17 = 3145$, de weekomzet neemt toe met
- $$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{57\,000}{1} = 57\,000 \text{ euro/machine.}$$
- Twee bijplaatsen: $R(18) = -18^3 + 25 \cdot 18^2 + 49 \cdot 18 = 3150$, de weekomzet neemt toe met
- $$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{62\,000}{2} = 31\,000 \text{ euro/machine.}$$
- Drie bijplaatsen: $R(19) = -19^3 + 25 \cdot 19^2 + 49 \cdot 19 = 3097$, de weekomzet neemt toe met
- $$\frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{9\,000}{3} = 3\,000 \text{ euro/machine.}$$

- d In een plot kun je zien dat de maximale weekopbrengst wordt bereikt wordt tussen 17 en 18 machines. Het aanschaffen van de derde extra machine heeft dus een omzet verlaging tot gevolg.



- T-2a In dat uur legt Ralf $A(60) = -0,25 \cdot 60^3 + 23 \cdot 60^2 + 5 \cdot 60 = 29100$ meter af.

De gemiddelde snelheid is dan $\frac{29100}{60} = 485$ m/min = 29,1 km/uur.



Zoals je aan de plot kunt zien is Ralf betrekkelijk langzaam gestart, later harder gaan rijden en toen enige tijd met een constante snelheid en aan het einde ging het weer wat langzamer.

- c De gemiddelde snelheid tussen de 5^e en 15^e minuut was:

$$\frac{A(15) - A(5)}{10} = \frac{4406,25 - 568,75}{10} = 383,75 \text{ m/min.}$$

- d De grafiek is tussen de 5^e en de 15^e minuut toenemend stijgend en dus is de gemiddelde snelheid over deze periode lager dan de snelheid aan het eind.

- e Snelheid op $t = 5$: $\frac{A(5,001) - A(5)}{0,001} = \frac{568,96627 - 568,75}{0,001} = \frac{0,21627}{0,001} = 216,3$ m/min.

Snelheid op $t = 15$: $\frac{A(15,001) - A(15)}{0,001} = \frac{4406,7763 - 4406,25}{0,001} = \frac{0,5263}{0,001} = 526,3$ m/min.

- T-3a Op tijdstip $t = 0$ is het gewicht 2,4 gram.

- b De groeisnelheid op tijdstip $t = 10$ is:

$$\frac{G(10,001) - G(10)}{0,001} = \frac{8,898497 - 8,897331}{0,001} = \frac{0,001165}{0,001} = 1,17 \text{ gram/dag}$$

c

tijd t	gewicht G	groeisnelheid
0	2,4	0,31447
5	4,621	0,60548
10	8,897	1,16580
15	17,131	2,24465
20	32,984	4,32189
25	63,509	8,32142
30	122,280	16,02219

Je ziet dat de groeisnelheid groter wordt naarmate het gewicht groter is. De groeisnelheid is dus afhankelijk van het gewicht.

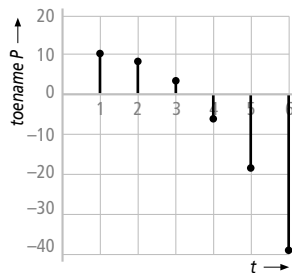
- d De relatieve groeisnelheid op $t = 0$ is $R = \frac{0,31447}{2,4} \approx 0,131$ gram/dag.

De relatieve groeisnelheid op $t = 20$ is $R = \frac{4,32189}{32,984} \approx 0,131$ gram/dag.

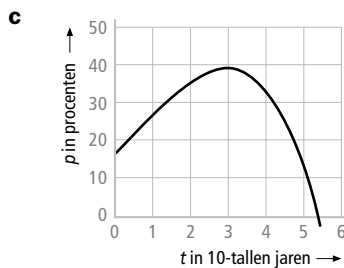
bladzijde 189

T-4a

tijd	0	1	2	3	4	5	6
P	17	27,3	35,737	39,147	33,4	13,598	-25,82
toename P		10	8	3	-6	-20	-39



- b** Rond 1980 bereikte het percentage rokers een maximum. Dat zie je in het toenamediaagram omdat dan de toenames overgaan in afnamen.



Met de rekenmachine vind je het maximum bij $t \approx 30$, dus 1980.

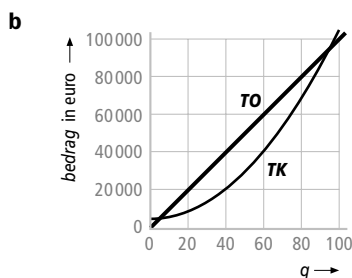
- d** Het maximale percentage is 39%.

- e** De helling voor $t = 2$ is bij benadering

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(2,001) - P(2)}{0,001} = \frac{35,743796 - 35,737258}{0,001} = \frac{0,006538}{0,001} \approx 6,54$$

De praktische betekenis van deze helling is dat het percentage rokers rond 1970 toenam met ongeveer 6,5% per 10 jaar.

T-5a $TO(q) = 100q$



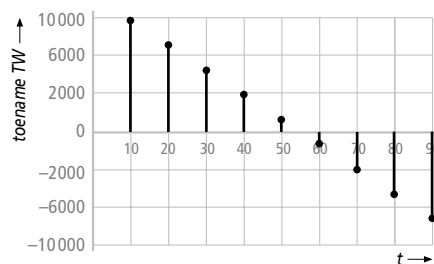
- c** De koffiebrander maakt winst als $TO > TK$ dus tussen de 6 en 94 containers.

- d** De winst is maximaal als de afstand tussen beide grafieken het grootst is, dat is ongeveer bij 50 containers.

- e** $TW = TO - TK = 1000q - 10q^2 - 5000$

f

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
toename TW		9000	7000	5000	3000	1000	-1000	-3000	-5000	-7000



Uit het toenamediaagram blijkt dat de toenames overgaan in afnamen rond $q = 50$.

T-6a

aantal deelnemers	prijs per deelnemer	totale opbrengst
25	400	10 000
35	400	14 000
50	400	20 000
60	350	21 000
75	275	20 625

b $TO = 400n$

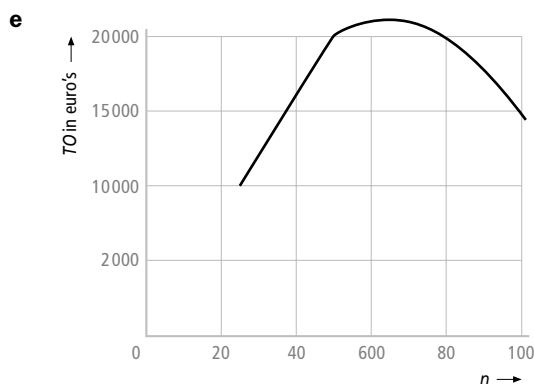
c Ga weer uit van n deelnemers. Het basisbedrag is € 400,- daar gaat per deelnemer boven de 50 5 euro vanaf. Het aantal deelnemers boven de 50 is $n - 50$.

Wanneer er meer dan 50 deelnemers zijn is de prijs per deelnemer:

$$p = 400 - (n - 50) \cdot 5$$

d Uit de formule bij opdracht c volgt dat

$$TO = n \cdot p = n \cdot (400 - (n - 50) \cdot 5) = n \cdot (400 - 5n + 250) = 650n - 5n^2 \text{ voor } 50 < n < 100.$$



f Het maximum is het maximum van $TO = 650n - 5n^2$. Met je rekenmachine vind je de maximale opbrengst bij 65 deelnemers.

g De maximale opbrengst is 21 125 euro.